

# 「問題提出」的教學模式與數學好奇心的培養

趙小雲 梁興強

## 引言

數學老師對數學課程改革所引起的共同困難是：老師教學時大多採取依書直說-做習題的機械式的教學方式，卻又未找到合適的教學模式去取代之。波利亞(1957)認為任何數學教學也可以化為問題解決的教學模式。所以，問題解決的教學是數學教學的一個重要組成部分，在香港的數學課程指引(2001)及中國內地的數學課程標準解讀(2002)中一直受到重視，但是問題提出則往往被忽視。其實問題提出與問題解決是緊密相連的。首先，我們把提出新的問題看成問題解決的一個必要的組成部分。在問題解決過程中可以提出如：我能解決一個更簡單的問題嗎？我知道一個相關問題嗎？其次，一些學生直到他們開始設計和分析一系列相關問題時，他們才能完全明白和領會問題答案的重要性；同時問題提出也是培養數學思維的一個重要組成部分。

問題提出是指通過對情境的探索產生新問題，或在解決問題過程中對問題的再闡述，所以，問題提出既是一種課程活動，又是一種教學活動。因此，教師應該經常要求學生根據各種不同的情境，包括數學範圍內的和範圍外的，來表示有趣的問題。另外，猜想也是另一個很重要的數學行為，故建議教學方案不僅要讓學生經歷推測猜想，而且要經歷發展和評價數學觀點、證明。

### 培養學生提出問題能力的重要性

當解決問題過程中遇到一個較難解決的問題時，波利亞(1957)的啟發法建議思考

一個相關的、較易解決的問題；他提出的幾十個設問，都讓我們強烈意識到問題提出對問題解決的促進作用。同時，對一個複雜問題的解決過程包括提出一些連續的更精煉的問題——更能體現已知資訊與目標之間關係的問題。正如聶必凱(2003) 指出的，這一系列問題提出的同時，也將總的解決問題的目標分解為一層層的次目標，通過逐次對次目標的實現，得到對原問題的最終解決。

同時，問題的提出和分析是培養學生數學好奇心的一個重要方面，好奇心可以理解為一種想學習或瞭解知識的渴望，包括通過完成一個問題解答後，提出有趣的數學問題來探索數學思想方法的渴望。問題的解答或其他方面成為繼續探索的出發點。正如 Sowder 及 Schappelle(2002)指出，問題提出的本質是讓學生經歷數學，而不僅僅是吸收數學，並且新觀點新思想的產生是數學思維的一個重要的令人激動的方面。只有讓學生真正地認識到發現——提出問題的重要性，才能使學生自覺地去注意世界、觀察世界，以探究的眼光去看待問題，提出有質量的問題，進而使學生產生強烈的興趣，達到教學的目的。

目前，人們對提出問題方面的研究缺乏的是以下幾個方面的思考：學生怎樣自己提出問題；老師怎樣幫助學生自己提出問題；老師在學生自己提出問題方面應起的作用。本文根據國內外的一些見解，引進問題提出模式，且闡述學生怎樣根據這個模式來提出問題。

### **問題提出模式（PPM 模式）**

根據 Contrera(2003), 圖 1 是問題提出模式，這種模式的應用能指導學生提出問題，並提高他們提出問題的能力。一個給定的數學問題包含一些已知的資訊，一些未知的資訊和一些內在的和外在的限制條件。我們可以通過改變問題資訊的種類和考慮證明問題、逆問題、特殊例子、一般例子和類似例子來產生新的問題。

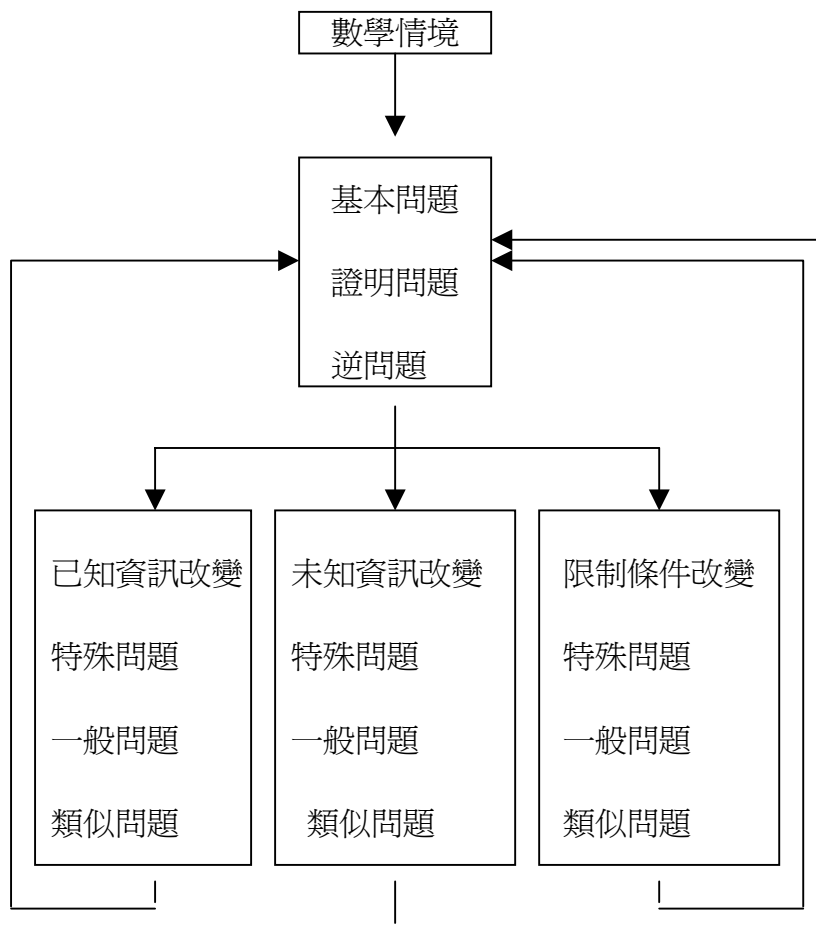


圖 1 問題提出模式

### 創設問題情境

數學問題產生於數學情境，培養學生提出數學問題的能力，離不開數學情境的精心創設。教師可以通過例題講授問題提出的一般模式，學生則根據模式，發揮創意提出各種新穎的非常規的問題。數學情境是指含有相關數學知識和數學思想方法的情境，同時也是數學知識產生的背景，它不僅能激發數學問題的提出，也能為數學問題的提出和解決提供相應的資訊和依據。一般地，數學情境可用文字語言、符號語言以及圖像語言來表示。正如夏小剛，汪秉彝(2003)所說，以符號語言表達的情境，具有可操作性；以文字語言表達的情境，能使人產生一種身臨其境的真實感；而以圖像語言表達的數學情境則具有直觀性和生動性。

情境：1 如圖 2，給定一個等邊三角形， $\triangle ABC$ ，構建一個新的三角形， $\triangle DEF$ ，其中，點 D、E、F 分別是等邊三角形三邊的中點，問 $\triangle DEF$  與 $\triangle ABC$  的面積之比？

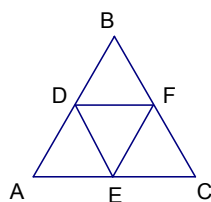


圖 2

情境：2 構建一個平行四邊形 ABCD，作平行四邊形的內角平分線。設 E，F，G 和 H 為角平分線的交點。如圖 3，我們可以看到，創設問題情境極為重要。

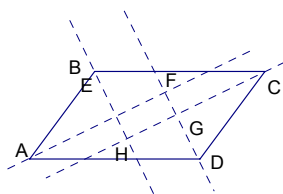


圖 3

隨著幾何軟件的開發和使用，使得創設生動有趣的數學問題情境變成可能。給出了一個由特定問題情境成爲學生提出問題的良好氛圍的模式，並由這種提出問題模式來培養猜想能力。而使用幾何軟件能更快地探索提出問題模式中的幾何情境範圍。

### 基本問題

像上面情境 2 這種隱含的問題情境沒有直接給出問題，那麼問題提出的第一步就是根據問題情境提出最初的問題，這類問題包含問題情境中的內容，稱爲基本問題。而情境 1 中的問題就可視爲此情境的基本問題。而情境 2 中的基本問題則可視爲平行四邊形的四條內角平分線構成什麼圖形的問題。

## 根據模式提出問題

根據提出問題模式，來分析基本問題中的三種資訊：已知的、未知的和限制條件。然後再根據模式分別提出每一種資訊的三種問題：特殊問題、一般問題和類似問題。當然，對於已知、未知和限制條件三種資訊來說，並不是所有闡述的問題都能改為特殊例子、一般例子和類似例子。

先看情境 1，它的已知資訊就是  $\triangle ABC$  是等邊三角形，限制條件是點 D、E、F 都必須在  $\triangle ABC$  的三條邊上，基本問題中是在三條邊的中點，未知信息是  $\triangle DEF$  與  $\triangle ABC$  的面積比。情境 1 中學生首先會想到的一般是針對限制條件，提出特殊問題。如：點 D、E、F 不是  $\triangle ABC$  三邊的中點，而是距頂點  $1/3$  邊長處的點或  $1/9$  邊長處的點（如圖 4 和 5），乃至推廣到一般情況即：等邊三角形三邊上其他的點時， $\triangle DEF$  與  $\triangle ABC$  的面積比又如何？

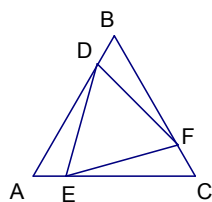


圖 4

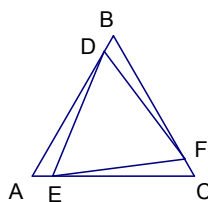


圖 5

當然，對圖 3 和 4 所示的兩個問題解決的探討十分有趣，可以通過幾何軟體等多媒體技術來解決，也可以通過分析的方法來解答。學生通過問題解決過程中遇到的情況，思考提出新的問題，改變已知資訊即等邊三角形為一般三角形，或推廣到正方形等情況，提出類似問題，使問題複雜化，難度提高，學生探索解答的熱情很高，並為推廣到多邊形鋪墊。

現再看情境 2，它的已知條件是平行四邊形，限制條件是平行四邊形的四條內角平分線，未知條件是內角平分線所構成的圖形。這個問題情境非常適合提出

問題，以下針對情境 2，詳細地說明怎樣根據 PPM 模式來提出問題。

提法 1：根據表 1 中的模式，我們首先可以提出基本問題 1 的證明問題：平行四邊形四條內角平分線所構成的圖形是矩形。逆問題：一個四邊形的四條內角平分線所構成的圖形是矩形，請問這個四邊形是什麼四邊形？然後再改變已知資訊、未知資訊和限制條件提出盡可能多的問題。

提法 2：首先看已知資訊，若將條件——平行四邊形改為特殊情況，像矩形、菱形等，得到圖 6 的問題：矩形的四條內角平分線所構成的圖形是什麼？（正方形或一個點）。菱形的四條內角平分線所構成的圖形是什麼？（一個點）

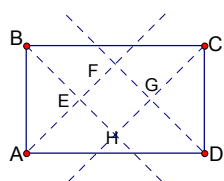


圖 6 (a)

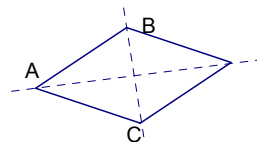


圖 6 (b)

若將平行四邊形一般化為四邊形，則又可提出四邊形的特殊問題、一般問題和類似問題。

特殊問題 1：等邊梯形的四條內角平分線所構成的圖形是什麼？（如圖 7a）

特殊問題 2：證明形如風箏狀的四邊形的四條內角平分線所構成的圖形是什麼？（如圖 7b）

一般問題：一般四邊形的四條內角平分線所構成的圖形是什麼？（如圖 6c）

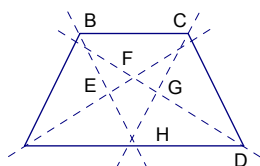


圖 7 (a)

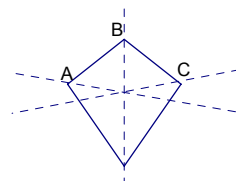


圖 7 (b)

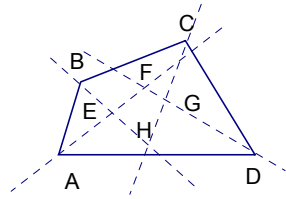


圖 7 (c)

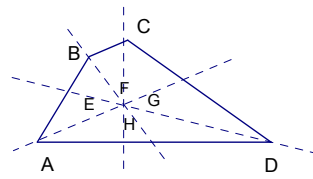


圖 7 (d)

特殊問題 1 的解答為形如風箏狀的四邊形，問題 2 的解答為一個點，一般問題的答案從圖 (c) 中我們可以看到。

類似問題 1：三角形的內角平分線所構成的圖形是什麼？

類似問題 2：六邊形的內角平分線所構成的圖形是什麼？

顯然我們早已知道三角形的內角平分線是共點的當然每一個提出的問題又有其證明問題和逆問題，此處就不贅述了。

提法 3：再看表 1，還可改變限制條件——內角平分線，將基本問題中的內角平分線換成其他的線，比如，中線、高線、中垂線，也可將內角平分線換成外角平分線。

特殊問題 1：平行四邊形的四條高線構成什麼圖形？（如圖 8a）

特殊問題 2：平行四邊形的四條中線構成什麼圖形？（如圖 8b）

特殊問題 3：平行四邊形的四條中垂線構成什麼圖形？（如圖 8c）

同樣，這些問題也有證明問題和逆問題。

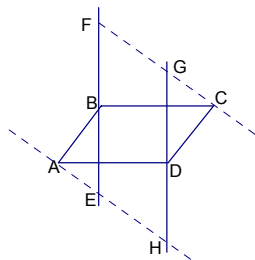


圖 8(a)

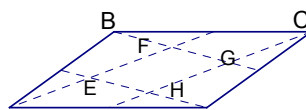


圖 8(b)

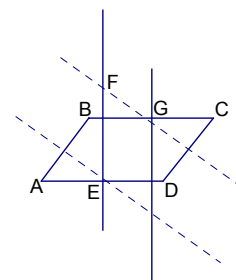


圖 8(c)

提法 4：改變未知資訊，即改變基本問題或其證明問題、逆問題所要探討的方面。如：平行四邊形的面積與四條內角平分線所構成圖形的面積有關係嗎？然後學生又可以把它看成基本問題，針對各個資訊提出各類問題。

### 問題提出與好奇心的培養

培養學生提出問題的能力，關鍵還是要通過典型實例引導學生如何去發現問題、提出問題，教學中的問題提出主要有概括型問題、猜想型問題、深化型問題和推廣型問題。讓學生熟悉諸如觀察法、類比法、分析歸納法和視角轉化法等，善於從多方面深化、引申或推廣問題。經常誘導與啟發點撥學生運用類比、猜想方法深化、推廣問題，不僅可以大大增強學生的發現問題能力，還能促進學生認識清楚數學概念、定理、性質及處理方法間的聯繫。

其次，學生學習數學離不開問題解決。用新方法來解決老問題，可以推動純粹數學的發展。當我們對老問題有了更好的理解，自然就會提出新問題。因此，在解決問題的過程中或之後，應鼓勵學生提出問題和變換問題。上面所學的情境 1 就是在解決基本問題的過程中思考到了新的問題，並進行了推廣。日常教學中，教師可以引導學生根據問題提出模式深入考慮：這個問題有沒有其他的解法或更簡捷的做法（一題多解）？有沒有更一般的情形？這個問題是怎樣想到的？用這個問題的解法可否解決其他問題（一法多用）？教師應教會學生提出問題的技巧。在對問題的改造中加深對知識的理解，加強知識間的聯繫。

提出的問題要體現教育功能，應注意思想性和教育性相結合；提出的問題要清晰易懂，適當地體現趣味性和現實性，並符合教學的需要，問題的形式、內容和難度應以標準為準則，與教學的需要緊密結合。問題是數學活動為出發點，學數學應抓住其主要問題，這就要求學生善於提出問題，從某種意義上看提出問題



比解決問題更難、也更重要，它的本質就是創新。數學教學就是要讓學生沒有問題走進教室，帶著滿腦子的問題走出教室，即引導學生發現新問題、提出新問題並解決新問題，揭示知識的發生過程，引起他們的好奇心，樂於探索，創造新知，構建並完善認知結構。

## 結論

二十一世紀的數學教育不再強調知識的直接傳授與及學生進行機械式的模仿，正如世界各地在數學課程的改革中所著重的，是學生的探究和解決問題能力的培養。而香港教育統籌局最新修訂的數學課程指引(2001)及中國內地的數學課程標準解讀(2002)更以發展學生的思維、解難及創造力為目標。因此，教師必須摒棄「直接輸入法」為主要教學模式，要求老師要透過「問題提出」的教學模式，鼓勵學生多參與，多表達個人意見，從而達至培養學生的「傳意」、「探究」、「歸納」及「推理」等能力，藉此強化學生數學解難的能力。

## 參考資料

- 波利亞著、閻育蘇譯 (1994)。《怎樣解題》。臺北：九章出版社。
- 夏小剛，汪秉彝 (2003)。〈數學情境的創設與數學問題的提出〉《數學教育學報》(1) 29-30。
- 劉兼、孫曉天 (2002)。《數學課程標準解讀》。北京：北京大學出版社。
- 課程發展議會 (2001)。《數學教育學習領域：數學課程指引》。香港：政府印務局。
- 聶必凱 (2003)。〈數學問題提出研究綜述〉，《數學通報》1，9-10。
- Contreras, J.N. (2003). A problem-posing approach to specializing generalizing and extending problems with interactive geometry software. *Mathematics Teacher*, 96, 4(4), 270-275.

Sowder, H., & Schappelle, B. (2002). *Middle-grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction : A research monograph*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday & Co., Inc.