小學教師對數學課程改革的適應與解難教學

梁興強

引言

傳統的數學教學強調知識的直接傳授與及學生進行機械式的模仿，填鴨式的教育一直引起家長教師以及社會人士的不滿。 因而教育改革是在必行的。 然而，小學數學老師對香港對數學課程改革所引起的問題的焦點是: 既知機械的填鴨式的教育要不得卻又未找到教學模式去取代之。 以往香港的小學課程是極欠缺彈性的。 老師教書時大多依書直說。 學校與學校之間，即使學生的學習程度有分別，但在數學課程上卻沒大的差異。 然而新的教育趨勢則顯示數學課程與數學教學有所改變以配合教育改革的需要。 教統局已開始鼓勵學校就其學生的程度，以「校本」爲原則，編排該校的「自我課程」，編寫校本的教材。在新課程中，老師應就學生的能力，決定內容的深淺及範圍的多寡。老師不應單單依循教科書之單一內容作教學安排，應多參考書籍，配合學生的質素，自訂「校本課程」。 然而， 由於以教科書爲中心，所以一般香港數學老師的教學模式變化不多，而其教學成效更大部份依賴教科書的質素。若教科書過於重視「黑板式」的運算，忽略理解，則對培訓學生的高層次思維便產生嚴重的障礙。

數學課程改革

其實早在 1997 年香港已成立了一個全面檢討數學課程的特別「專責委員會」。這「專責委員會」的工作目標是基於穩妥的學術原則和社會的實際需要，向課程發展議會提出建議，以改善和提高中小學數學課程的連貫性及相關性，並爲數學新課程提供新的方向。正如專責委員會指出的：數學教育的目的是幫助學生理解及掌握基本的數學知識，技巧的概念，建立對數學學習的正面態度， 讓他們日後能不斷發展關鍵能力，例如解決問題、傳意、運算及邏輯推理。

課程的調適

一般小學數學老師皆覺得自己的數學教學是免強升任的。但他們亦承認相關的數學教學培訓是不足的。這實與小學數學教師的要求不足。主因，在香港小學教授數學的老師，並非一定需要於師資培訓中主修或副修數學。小學的老師，應不單要了解自任教的課程內容，亦應了解整個中小學的數學課程內容。這樣便可盡量減少中小學重覆的課程，並使中小學數學課程的連貫得更順暢、更緊密。數學的評估要多樣化，不應單以筆試作爲學生成績評估的唯一工具。

另一方面數學教師應能透過資訊科技作爲有效的教學工具，藉以輔助學生理解數學概念。數學老師應有足夠的數學教學培訓。培訓應包括數學本科知識及相關的數學教學知識。數學老師們亦應多作交流、相互觀課，藉以達致教學相長的目的。

梁、容、杜 (2002)重新分析了在 1999 年舉行的第三屆國際數理學習研究，比較了 26 個國家小學生的數學能力，指出香港學生的平均數學能力不差，於小

學成績而言，排行第四位， 僅較日本、星加坡及南韓為低。 香港學生的數學能力，一般強於運算及解決「常規難題」，其原因主要因為學生多做習作，勤於操練。 但相對而言，香港學生則於處理「非常規難題」時，表現每每較差，主要因為欠缺「高層次思維」的培訓。

另一方面，在這次研究中，發現香港學生的數學成績和他們對數學的興趣是有高度相關的。 但奇怪的是，這次研究的結果顯示：相對其他國家而言，香港學生並非屬於最喜愛數學之類別。 這與數學課程的內容和老師的教學方法有很大的關係！ 面對繁複而沉重的數學課程，以往大多數老師皆以「直接輸入法」為主要的數學教學模式，再配以大量的操練，故大抵於高中前，香港學生的數學成績會是不錯的。 但這樣乏味的教學方法，試問又如何能培養出學生的學習興趣，更枉論要他們說喜愛數學了。 因而，老師在數學教學上要作出調適，並需尋求新的有效的方法去教學，使學生比較容易理解所學的數學概念，發展其解決問題的能力。

教學的適應

數學學習不單是數學課題的學習，亦應顧及數學的演算過程及如何培養學生的高層次思維能力和良好的學習數學態度。 在教學方面，老師深切明白「理解」遠勝於「強記」。 因此，在新的數學教學中，老師的教學要相應地作出調適。例如教授「公式」、「運算方法」的時候，老師應透過不同的教學方法，輔以教具，說出它們的背後理由，並附以引證，這樣學生便可明白到該公式的來源、運算步驟的因由。 這樣，遠比單單強迫學生強記公式、步驟來得就有意義。 因此，可以說，新的數學教學要求老師要透過不同的教學形式，如透過具趣味的活動、討論，甚至角色扮演，鼓勵學生多參與，多表達個人意見，從而達至培養學生的「傳意」、「探究」、「歸納」及「推理」等能力。

然而，如何有效地培養學生上述所討論的能力呢？ 筆者認為在新的數學教學之中，老師應多透過利用解難教學的模式或稱為數學「問題解決」的教學模式，利用圖表，圖像及符號來表達及傳遞數學訊息。 學生必須懂得正確地描述提問及解釋數學概念，亦須積極與同學交流意見，而在交流的過程中學會獨立思考，解決問題。 這是一種創作性的活動，藉此，學生可以發揮他們的創意，想像及靈活性，從而提高學生的高層次思維能力。 而小學數學解難教學正是一種有效的教學藝術。 有人說好的教師不是在教數學，而是激發學生自己學數學。 的確，好的教師能激發學生經歷解難的過程，從而學習解難。 老師應多透過非常規性的問題，鼓勵學生多思考及利用已學得的數理及運算技巧，發展學生個人的解難策略，提高他們的高層次思維的能力。 基於這樣的要求，現時大部份新的優質教科書，亦已作出相應的調適，在課文中加插「考考你」或「解難」的內容。

解難教學的推廣

波利亞(1957)在數學解題方面強調猜測、注意資料、類比、一般化和特殊化等數學家常用的思考習慣，這種做法獲當時數學教育家的高度評價。以下的例子是根據波利亞數學「問題解決」教學的模式而設，簡潔地闡明波利亞(1957)提出的四步解題法， 說明 (1) 怎樣理解問題 (Understanding the problem)，(2) 怎樣

擬定計劃 (Devising a plan)，(3) 怎樣實現計劃 (Carrying out the plan)以及 (4) 回顧 (Looking back)，從而激發學生經歷解難的過程並應用到新的情景中，從而幫助學生培養數學的興趣及獨立思考的能力。 關於「問題解決」教學的研究，有學者指出學生解決問題時必須具有下列三重能力: 首先，學生必須具有智性技能，數學規則及概念，問題才能解決。 其次，學生必須具有組織的語言訊息，使學生理解問題及正確地評估解決問題的方法。再其次，學生必須具有恰當的認知策略，使學生能正確地選擇訊息和技巧去解決問題 (趙居蓮，1996)。

下面讓我們討論一個例子，簡潔地闡明波利亞提出的四步解題法，藉此希望推廣數學解難的教學，並有效地培養學生上文所討論的數學學習能力。

(1) 理解問題 (Understanding the problem)

100 名同學互相握手一次，請問共有多少次不同的握手方式？

(2) 擬定計劃 (Devising a plan)

在數學「問題解決」的過程中，學生可以採用簡化的策略，先試做 2 個，3 個或 4 個人的握手情況，再找出方法，推廣至 100 人的情況。

(3) 實現計劃 (Carrying out the plan)

假若有 4 個人 A，B，C，D，我們可以列舉所有的可能性：AB，AC，AD，BC，BD，CD。答案是 6 次。握手問題的解如圖 1:

	A	B	C	D
A		🖐	🖐	🖐
B			🖐	🖐
C				🖐

圖 1

2 個人的握手次數 = 1

3 個人的握手次數 = 1 + 2

4 個人的握手次數 = 1 + 2 + 3

5 個人的握手次數 = 1 + 2 + 3 + 4

……

故此 100 個人握手的次數

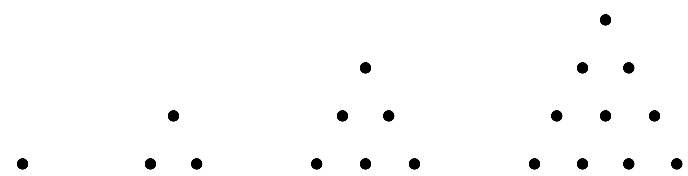
$= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99$

$= \dfrac{100 \times 99}{2} = 4950$(次)

(4) 回顧 (Looking back)

根據文耀光及梁興強 (2003) 的論述，這是「三角形數」(Triangular Numbers)的一個生活上的應用。理論上，設 $n \in N$。如果 T_n 表示第 n 個三角形數，那麼

$T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 。如下圖 2:



1　　　3　　　6　　　10

圖 2

有些學生可能學過本題的解法，例如 3 個人握手的次數等於 $\frac{3\times 2}{2}=3$，4 個人握手的次數等於 $\frac{4\times 3}{2}=6$，5 個人握手的次數等於 $\frac{5\times 4}{2}=10$，但是，學過解題方法的學生未必能推廣。要看看學生的能力。可以叫他們解類似的問題，例如以下的一題延展問題。

延展問題：

已知兩點能劃出一直線，現在圓圈上有 100 點，它們能劃出多少條直線？再一般地，延展這類問題可推廣至 n 點能劃出多少條直線。這就已是點與線的關係了。 解法很簡單， 只需把上述問題推廣成 “n 名同學互相握手一次，問共有多少次不同的握手方式?” 就可以了。 於是 “n 點能劃出多少條直線”這樣的問題只要劃個表就可得出結論了。

表一: 點與線的關係

點數	線數
2	1
3	1 + 2
4	1 + 2 + 3
5	1 + 2 + 3 + 4
6	1 + 2 + 3 + 4 + 5
…	…
n	$\frac{n(n-1)}{2}$

所以，n 點能劃出 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線。若把上述問題改變成另一形式：一個 n 邊形共有多少條對角線？ 很明顯，從上一條題目可以看出，因為三邊形有 3 點，所以可劃 3 條直線。因此，減去邊數 3，一個三邊形有 3 – 3 = 0 條對角線。類似地，因為四邊形有 4 點，所以可劃 6 條直線。因此一個四邊形有 6 – 4 = 2 條對角線。因為五邊形有 5 點，所以可劃 10 條直線。因此一個五邊形有 10 – 5 = 5 條對角線。因為六邊形有 6 點，所以可劃 15 條直線。因此一個六邊形有 15 – 6 =

9 條對角線。如此一來，n 點能劃出 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線，因此，一個 n 邊形便有 $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ 條對角線這個結論了。

解難教學的評估

根據香港大學教育學院的意見，數學解難教學或稱爲數學「問題解決」的教學模式是一個　發式的學習過程，因這個教學模式是以活動爲主。 實行數學「問題解決」的教學時，教師要特別留意提問的時間，因學生需時間去明白問題及提出解決的方法。所以耐性和開放式的處理方法是很重要的。 因此，以下的評估準則有助教師實行數學「問題解決」的教學：

首先，「難題」應有數學概念的示範。其次，「難題」應該能引起學生的興趣。再其次，「難題」應涉及真實物件或仿真實情況。「難題」應要求學生對資料的運用能作出一些改變或轉換。「難題」應允許有不同程度的題解。同一「難題」應能適用於多種具體情況。最後，學生應相信問題是可解答的，亦應能認知題解所在。

總的來說，評估的準則必須考慮到下列的各項要點。 首先，題目的佈置 (Problem posing) 是否有心思，能否　發學生思考。 題目的類型是一般的非常規應用題還是常規應用題。 除此之外，教師亦應考慮題目是否 “過難”，超出學生的程度，還是 “過易”，對學生而言，毫無新意。 第二必須考慮的是如何引導學生理解題目(Understanding the problem)。 這裡，必須能把題目細分，恰當，清晰，有條理，並能嘗試利用有效的方法使學生理解題目。 第三，引導學生思考解題的策略 (Strategy for solving problem)。 能否引導學生思考，方向是否清晰明確，解題的策略是否恰當，有沒有　發性都是很重要的。 第四，最重要的是解題的效能 (Effectiveness of solving problem)。 教師必須考慮用最有效的策略解題。 最後，回顧與延展 (Looking back and extension)，必須考慮學生能否分析整個解題過程及題目的意義，並以題目的延展或推廣作解釋。

結論

香港小學數學課程較爲艱深，但教學時間緊迫， 加上一般學校都進行持續性評估引致教師必須在課程及教學改革中作出調適。 很多教師要求學生做大量習作來學習數學。 然而，這種強調知識的直接傳授與及學生進行機械式的操作的教學更進一步使學生覺得學習數學乏味。 針對這種情況，本文提倡以數學解難教學模式進行教學。從以上的討論中，可見數學解難教學的確是一種藝術，而這種解難教學模式的好處是教師可以創造機會幫助學生培養數學的興趣及獨立思考的能力。此外，數學解難教學的特色是著重尋找答案的過程，著重如何將一般解題的技巧運用到各種新情況中，或將不同的解題方式運用到單一情況中，更著重如何在基本的策略中，尋求創造性的推敲。 藉著挑戰學生的好奇心和給予合適程度的數學問題使學生得到以下的益處： 容易掌握數學的基本知識及技巧，理解「問題解決」的使用及技巧，提高學習興趣及　發自學精神，從而培育學生在新的環境下解決新問題的能力，使他能適應迅速改變的環境。

所以，可以說，數學解難教學是要求培養學生批判性思維的。綜觀現時香港很多小學教師只依照教科書直接將算式展示給學生，吩咐學生強記。然而，當題目有所改變時，學生就不懂解題了。波利亞的「四步解題法」解難教學模式重視擬定解題策略的多樣性，鼓勵找出不同的解題方法，在這種訓練下，學生能更自由、自主地運用他們的想像去作答。均衡的數學課程， 多變的內容以及靈活的解難策略必能幫助學生學習數學。 因此，讓我們在今後的數學教學中多採用解難教學模式，從而培養學生探究數學的精神和高層次思維。

參考資料

文耀光、梁興強 (2003)。《初等數學概念》。香港：香港教育圖書公司。

波利亞著、閻育蘇譯 (1994)。《怎樣解題》。臺北：九章出版社。

Gagne,R.M. 著、趙居蓮譯 (1996)。《學習與教學》。臺北：心理出版社。

Kwan, S.K. (2000).The holistic review of mathematics curriculum in Hong Kong. In H. K. Leung (Ed.), *Proceedings of the Hong Kong Mathematics Education Conference 2000* (pp. 17-32). Hong Kong: Department of Mathematics, Hong Kong Institute of Education.

Leung, F.,Yung, B. & Tso, A. (2002). *Secondary analysis of the TIMSS-R data for Hong Kong: A report for Hong Kong in the Third International Mathematics and Science Study.* Hong Kong: Faculty of Education, The University of Hong Kong.

Polya,G. (1957). *How to solve it.* New York: Doubleday & Co., Inc.